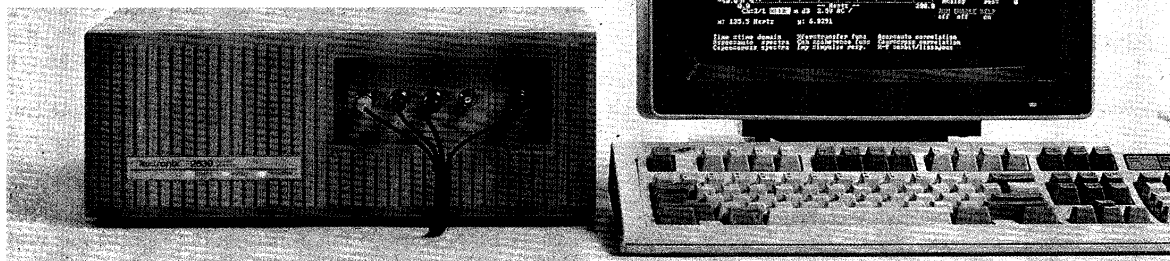


Werner Schnorrenberg

## Frequenzanalyse durch FFT

### Der FFT-Analysator und seine Fehlerquellen

Meßtechnisch werden Frequenzspektren mit einem Spektrumanalysator erfaßt. Prinzipiell ist dies ein Gerät, das innerhalb eines bestimmten, einstellbaren Frequenzbereichs die Verteilung der einzelnen Komponenten eines Spektrums mit Frequenz- und Amplitudenangabe wiedergibt. Im NF-Bereich wird hierzu vorwiegend der FFT-Analysator eingesetzt. Der folgende Beitrag behandelt Grundlagen der Fourier-Transformation und -Analyse und gibt Hinweise auf Fehlerquellen beim Einsatz von FFT-Analysatoren.



Vierkanal-Fourier-Analysator TEK 2630 für Spektrum-, Netzwerk- und Signalform-Analyse von DC bis 20 kHz

Der Frequenzbereich moderner Spektrumanalysatoren erstreckt sich heute von wenigen Hertz bis in den nahen Infrarotbereich. Anhand ihrer oberen Frequenzgrenze lassen sie sich grob in vier Bereiche einteilen:

- |   |   |
|---|---|
| I. NF-Bereich                                 | bis ca. 1 MHz   |
| II. Basisband                                 | bis ca. 200 MHz   |
| III. HF-Bereich                               | bis ca. 2 GHz   |
| IV. Mikrowellen- und Millimeterwellen-Bereich | 2 GHz...30 GHz (koaxial)<br>18 GHz...> 300 GHz (Hohlleiter) |

Der Bereich I erfaßt die Akustik und Mechanik (Schwingungsanalyse) und wird zunehmend von Echtzeit- und FFT-Analysatoren beherrscht. Die Bereiche II und III werden der HF-Technik (VHF/UHF) zugeordnet, Bereich IV der Mikrowellenmeßtechnik wie Radar und Richtfunk. Nach dem heutigen Stand der Technik kommen in den Bereichen II bis IV ausschließlich Analysatoren mit Frequenzumsetzung zur Anwendung.

### FFT-Analyse

Im Niederfrequenzbereich werden, wie erwähnt, vorwiegend sogenannte „Echtzeit“- oder „FFT“-Analysatoren eingesetzt, die ein Zeitsignal aufnehmen, digital speichern und durch „Fast-Fourier-Transformation“ (FFT) dessen Spektralanteile berechnen und darstellen (Bild 1). Die Domäne und der eigentliche Vorteil dieser „digitalen Spektrumanalysatoren“ liegt in der Fähigkeit, auch nichtperiodische, stochastische Signale spektral zu erfassen und zu analysieren. Nach erfolgter Fourier-Transformation können weitere mathematische Operationen und beliebig komplizierte Signalabhängigkeiten, wie z. B. die Korrelation stochastischer Signale, durchgeführt werden.

In der Praxis werden FFT-Analysatoren zur Messung mechanischer Resonanzen (Schwingungsanalyse) an Motoren, Turbinen, Generatoren, Lautsprechergehäusen, zur Messung der mechanischen Stabilität von Ton-

trägern wie Bandgeräten und Plattenspielern und in der allgemeinen Akustik zur Analyse von Nutz- und Störgeräuschen eingesetzt.

Nach Passieren eines Tiefpaßfilters (Anti-Aliasing-Filter) tastet der digitale Spektrumanalysator das Meßsignal  $a(t)$  mit Nadelimpulsen (Sample-Impulse) ab und wandelt die Analogwerte in Binärzahlen um. Die digitalen „Wörter“ werden in schnellen Zwischenspeichern abgelegt, auf die dann der Systemprozessor zugreift und abschnittsweise die Spektren ermittelt. Die obere Grenzfrequenz ergibt sich aus der Umsetzungsrate des A/D-Wandlers, der Wortbreite und der verwendeten Sample-&Hold-Schaltung.

Der von einem FFT-Analysator verarbeitbare Dynamikbereich hängt fast ausschließlich vom eingebauten A/D-Umsetzer ab. So verarbeitet z. B. ein 12-Bit-A/D-Wandler 72 dB Dynamik. Hinsichtlich der Dynamik müssen aber Kompromisse geschlossen werden, denn je höher die Wortbreite (Bits) des A/D-Wandlers ist, desto geringer wird dessen Verarbeitungsgeschwindigkeit. Demzufolge muß man sich bei höheren Frequenzen meist mit geringerer Auflösung zufrieden geben als bei tieferen Frequenzen.

Der typische Frequenzbereich moderner FFT-Analysatoren erstreckt sich zur Zeit bis maximal 10 MHz und bis zu 2 MHz in Echtzeit, doch ist mit fortschreitender Halbleitertechnologie eine Verschiebung der Grenze zu höheren Frequenzen absehbar.

## Diskrete Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation bildet ein kontinuierliches Zeitsignal im Frequenzbereich ab. Als Integraltransformation von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ist dies mit einem Rechner praktisch nicht durchführbar.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Statt dessen verwendet man bei FFT-Analysatoren eine approximierte Form der kontinuierlichen Fourier-Transformation, die diskrete Fourier-Transformation (DFT), bei der das Signal abschnittsweise der Transformation unterzogen wird:

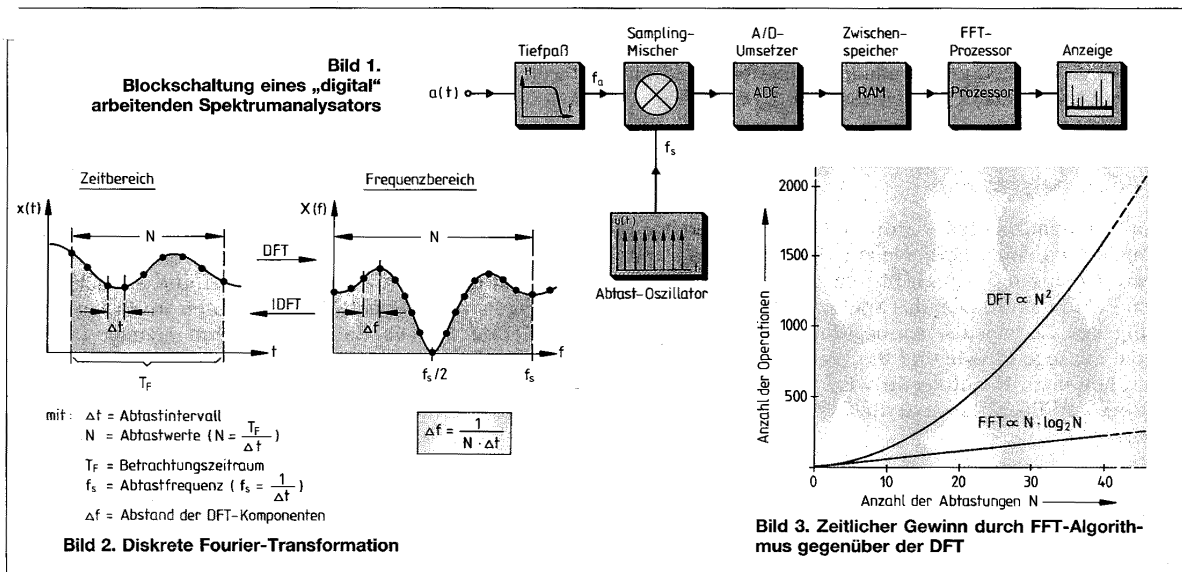
$$X(f) = \sum_{n=1}^{N-1} x(t) e^{-j2\pi k \frac{n}{m}}$$

Hierbei wird das Signal nicht kontinuierlich analysiert, sondern an  $N$  Stützpunkten abgetastet und mittels einer Summenformel in den Frequenzbereich überführt, so daß man ein diskretes Spektrum erhält (Bild 2).

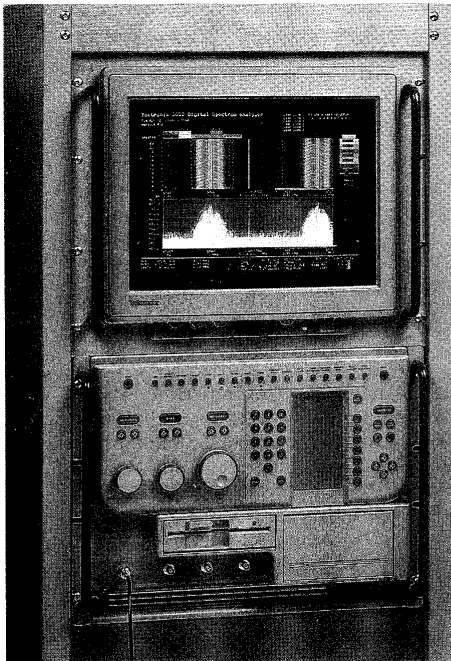
Entsprechend dem Faltungstheorem liefert die DFT ein in bezug auf die Abtastfrequenz periodisches und zum Abszissen-Nullpunkt symmetrisches Spektrum mit  $N/2$  Spektrallinien gleichen Abstands. Zur vollständigen Beurteilung genügt die Darstellung des Spektrums zwischen 0 und  $f_s/2$ . Damit es zu keiner Bandüberlappung kommt, müßten die Abtastfrequenz und die Grenzfrequenz des Tiefpaßfilters entsprechend dem Nyquist-Theorem dimensioniert sein. Die dargestellten Transformationsvorgänge sind sowohl vorwärts (DFT) als auch rückwärts (inverse DFT = IDFT) möglich.

Die DFT ist grundsätzlich mit einem Rechner lösbar, wenn auch mit beträchtlichem Rechenaufwand. Wesentlich schnellere Ergebnisse liefert die Fast-Fourier-Transformation (FFT), die zur Auswertung der DFT einen optimierten numerischen Algorithmus verwendet.

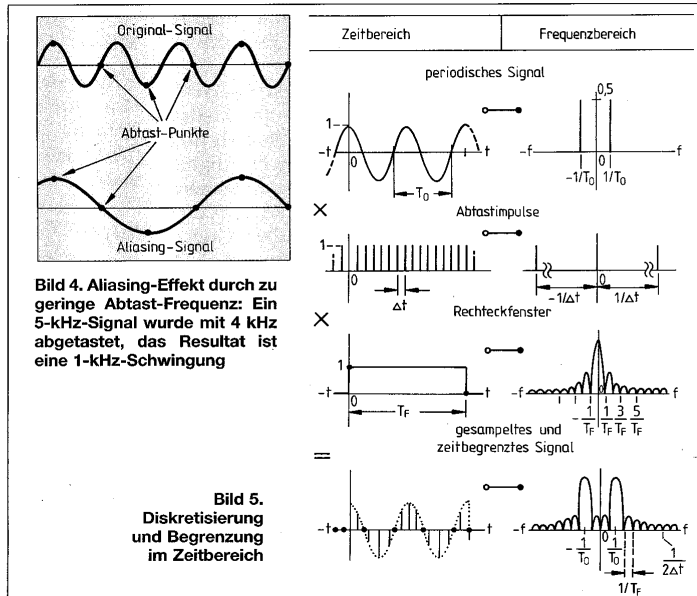
Zur Berechnung eines vollständigen Satzes diskreter Komponenten müssen  $N^2$  komplexe Multiplikationen durchgeführt werden. Die FFT vereinfacht dahingegen



## Messen und Testen



Schneller digitaler Spektralanalysator  
TEK 3052 mit einer Bandbreite von 10 MHz



hend, daß anstelle zeitaufwendiger Multiplikationen nur noch  $N \log_2 N$ -Operationen ausgeführt werden. Bild 3 zeigt deutlich die Rechenzeitersparnis der FFT.

Wenn der FFT-Prozessor schnell genug ist, einen kompletten Speicherinhalt abzuarbeiten bevor der nächste eingespeichert wird, geht keine Information verloren und es liegt „Echtzeitbetrieb“ vor. Die Wiederholrate (Update Rate) jeder Frequenzkomponente muß dabei mindestens doppelt so hoch sein, wie die Auflösung des Analysators. Schnellste Digital-Spektralanalysatoren erreichen mit paralleler Signalverarbeitung z. Zt. eine Echtzeit-Bandbreite bis zu 2 MHz mit 2,5 kHz Auflösung, wobei alle 200  $\mu$ s ein neuer kompletter spektraler Datenblock von 1024 Punkten zur Verfügung steht.

### Fehlerquellen beim Einsatz von FFT-Analysatoren

Die Frequenzanalyse mit FFT-Analysatoren ist systembedingt fehlerhaft. Neben Quantisierungs- und Linearitätsfehlern des A/D-Umsetzers kann es zu erheblichen Fehldarstellungen des Spektrums durch Unterabtastung des Zeitsignals, zeitbegrenzte Fouriertransformation, Leakage-Effekte und die Wahl von Fensterfunktionen kommen. Nachfolgend wird auf die Entstehung, Wirkung und Beeinflussung dieser Fehlerquellen näher eingegangen.

#### Abtasttheorem

Um ein Signal ohne Informationsverlust digitalisieren zu können, muß entsprechend dem Abtasttheorem von

Nyquist die Abtastfrequenz des A/D-Umsetzers mehr als doppelt so hoch sein, wie die höchste im Signal vorhandene Frequenz:  $f_s > 2 \cdot f_{\max}$

Wird dieses Abtasttheorem nicht erfüllt, treten sog. Aliasing-Effekte (Scheinfrequenzen) auf, die selbst durch nachfolgende mathematische Operationen nicht beseitigt werden können (Bild 4). Im Fall einer Unterabtastung ist das ursprüngliche Signal nicht mehr rekonstruierbar und das zu analysierende Spektrum nicht eindeutig zu interpretieren.

Diese Fehlabtastungen können weitgehend verhindert werden, indem alle Signale oberhalb der Grenzfrequenz durch steilflankige Tiefpaßfilter (Anti-Aliasing-Filter) schon im Eingang des Analysators unterdrückt werden.

#### Rechteckfenster

Die Zeitbegrenzung einer abgetasteten, kontinuierlich harmonischen Zeitfunktion der Periode  $T_0$  durch ein Rechteckfenster entspricht mathematisch einer Multiplikation der Signale im Zeitbereich und einer Faltung der zugehörigen Spektralkomponenten im Frequenzbereich (Bild 5). Die Rechteckfunktion erzeugt im Frequenzbereich ein kontinuierliches Spektrum der  $\text{sinc}/x$ -Funktion mit Haupt- und Nebenkeulen, woraus in Faltung mit den diskreten Spektrallinien ein um  $1/T_0$  verlaagertes kontinuierliches Spektrum resultiert.

Die entstehende Verbreiterung des Spektrums, auch „spectral leakage“ (leakage: verschmieren, lecken) genannt, verschlechtert die Selektivität der Analyse erheblich, d. h. Frequenz und Amplitude werden nur noch angenähert genau dargestellt.

Eine Vergrößerung der Fensterbreite  $T_F$  verursacht eine Verschmälerung der Hauptkeule und damit eine Verbesserung des Auflösungsvermögens. Hieraus erkennt man, daß die diskrete Fourier-Transformation eine Annäherung an die kontinuierliche Fourier-Analyse ist.

Bei Anwendung der DFT erhält man natürlich nicht das in Bild 5 gezeigte tatsächliche kontinuierliche Spektrum, sondern durch Multiplikation mit einer unbegrenzten Zahl von Spektrallinien ein diskontinuierliches Spektrum mit Linien in Abständen von  $\Delta f$ , wie Bild 6 als Fortsetzung von Bild 5 zeigt.

Neben Abtastrate und Fensterbreite, ist die Genauigkeit der DFT bei Analyse periodischer Signale abhängig von der zeitlichen Lage des Beobachtungsfensters in bezug auf die Periodendauer des harmonischen Signals. Ist die Fensterbreite  $T_F$  genau ein ganzzahliges Vielfaches  $n$  der Periodendauer  $T_0$ , dann fällt das Maximum der spektralen  $\sin x/x$ -Funktion mit der Grundfrequenz und deren Oberwellen zusammen (Bild 7b) und alle nicht mit  $1/T_0$  und deren Vielfachen übereinstimmenden Spektralkomponenten fallen zeitlich zusammen mit den Nullstellen der  $\sin x/x$ -Funktion. Das angezeigte Spektrum ist fehlerfrei und entspricht dem einer zeitlich nicht limitierten Fourier-Transformation.

Falls die Zeitbegrenzung nicht aus einem ganzzahligen Vielfachen der Periode des Ursprungssignals besteht – was in der Praxis durchaus dem Regelfall entspricht – kommt es, wie in Bild 7c dargestellt, zu erheblichen Diskontinuitäten in Form von Nebenlinien („Lattenzauneffekt“).

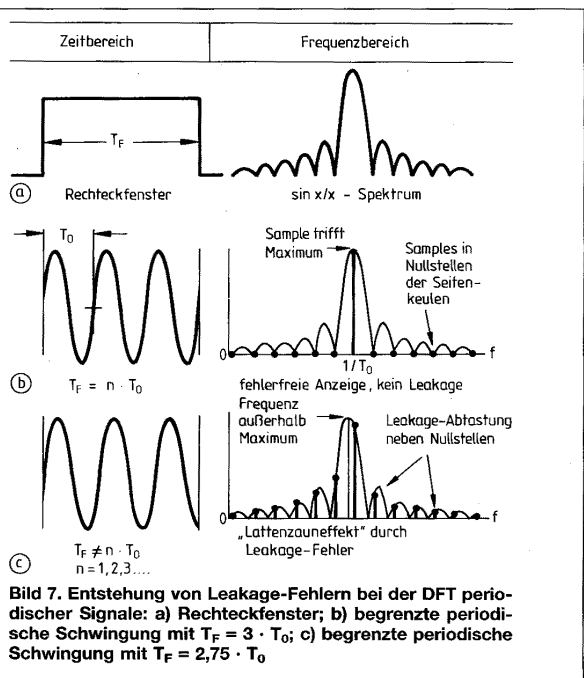
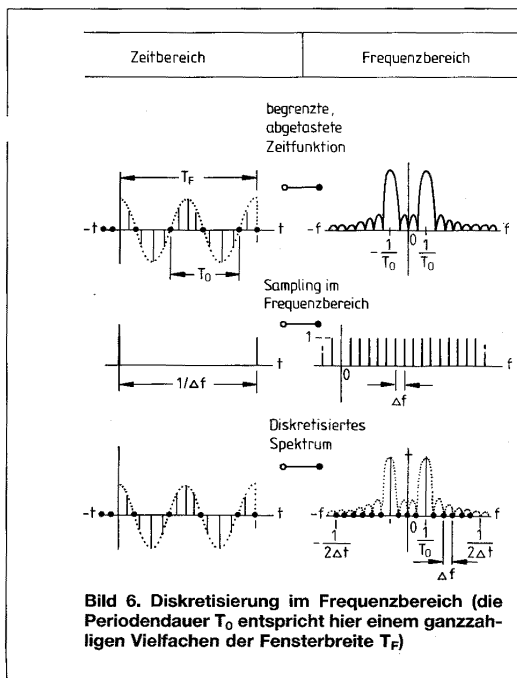
**Dipl.-Ing. W. Schnorrenberg**, geboren in Köln, studierte Nachrichtentechnik, begann 1976 bei Rohde & Schwarz, Bereich Service Funktechnik und wechselte 1979 in den R&S-Vertrieb Meßtechnik. Seit 1982 ist er Mitarbeiter der Tektronix GmbH, Köln, und dort als Sales Program Manager verantwortlich für die Tektronix-Hochfrequenzmeßtechnik. Nebenher ist er Dozent an der Technischen Akademie Esslingen.



## Fensterfunktion

Die Lösung dieser Leakage-Probleme konzentriert sich demnach auf die Verwendung geeigneter Fensterfunktionen (Bewertungsfenster), die den scharfen Randbereich des Rechteckfensters langsam abklingen lassen, um so die beschriebenen möglichen Diskontinuitäten zu vermeiden (Bild 8). Sie bewirken, daß ein periodisches Signal im Betrachtungszeitraum jeweils bei Null beginnt und endet und weisen dadurch erheblich geringere spektrale Welligkeit auf als das Rechteckfenster. Je stärker die unerwünschten Seitenkeulen gedämpft sind, um so geringer wirken sich die Fehler der DFT aus.

Die Form der Fensterfunktion muß an das Meßproblem angepaßt sein und hängt davon ab, ob Störanteile nahe am Haupt- oder Nebenmaximum oder weitab davon abgesenkt werden sollen (Tabelle 1). Alle Fensterfunktionen stellen einen Kompromiß zwischen Auflösung und Amplitudengenauigkeit dar.



# Messen und Testen

**Tabelle 1. Typische Fensterfunktionen, deren spektrale Bandbreite und Nebenkeulen-Unterdrückung**

Fensterfunktion	Spektralfunktion	3-dB-Bandbreite <sup>1)</sup>	höchster Nebenkeulen in dB
Rechteck		0,89	-13 dB
Dreieck		1,28	-27 dB
Hamming		1,30	-43 dB
Hanning		1,44	-32 dB
Blackmann		1,68	-58 dB

<sup>1)</sup> bezogen auf relative FFT-Auflösung  $\Delta f$

**Tabelle 2. Die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften von FFT-Analysatoren im Vergleich**

	FFT-Analysator	Spektrumanalysator
Frequenzabtastung	parallel	sequentiell
Frequenz-Meßbereich	DC bis ca. 100 kHz (Spezialgeräte bis 10 MHz)	5 Hz bis 1200 GHz (keine Analyse nahe null Hertz)
Amplituden-Meßbereich	+30...ca. -140 dBm	+30...ca. -150 dBm
kleinste spektrale Auflösung	$\leq 1$ Hz	3 Hz
fehlerfrei zu analysierende Signalform	transient	periodisch
Ergebnisdarstellung	Amplitude u. Phase über Frequenz	Amplitude über Frequenz
Berechnung von Signalabhängigkeiten (z. B. Korrelation)	ja	nein
Echtzeitanalyse	ja, mit eingeschränkter Bandbreite	nein
Vergrößerung der Selektivität	Zeitfenster verlängern	Auflösungsbandbreite verkleinern
Unterdrückung von Nebenschwingen	geeignete Fensterfunktion wählen	Reduzierung der Abtastgeschwindigkeit (sweep rate)

Anmerkung: Zur Analyse transienter Signale, die im Abtastraum beginnen und enden, dürfen mit Ausnahme des Rechteckfensters keine Fensterfunktionen verwendet werden!

## Vergleich: Spektrumanalysator – FFT-Analysator

Sowohl FFT-Analysatoren als auch Spektrumanalysatoren finden in stetig wachsendem Maß Anwendung in fast allen Bereichen der elektronischen Entwicklung, Forschung und Industrie.

Spektrumanalysatoren, die nach dem Überlagerungsverfahren arbeiten, gibt es seit mehr als 40 Jahren und haben inzwischen einen sehr hohen technischen Stand zu akzeptablen Preisen erreicht. FFT-Analysatoren gibt es dagegen erst seit etwa 20 Jahren parallel mit dem Aufkommen der integrierten Halbleitertechnologie, Mikroprozessoren und Weiterentwicklung der digitalen Signalverarbeitung.

Der digital arbeitende FFT-Analysator – auch digitaler Spektrumanalysator genannt – und der im Gegensatz dazu analog arbeitende Spektrumanalysator adressieren dabei völlig unterschiedliche Anwendungsgebiete. Der zunächst augenscheinlichste Unterschied besteht im Frequenzbereich: der von FFT-Analysatoren reicht von DC bis ca. 100 kHz – bei Spezialgeräten bis 10 MHz –, der von Spektrumanalysatoren von einigen Hertz bis über 1 THz.

FFT-Analysatoren arbeiten nach dem Prinzip der parallelen Frequenzabtastung, ähnlich einer Bank paralleler Filter, und eignen sich daher besonders zur Analyse transienter Signale. Spektrumanalysatoren tasten den Frequenzbereich sequentiell ab und können deswegen nur periodische Signale fehlerfrei analysieren.

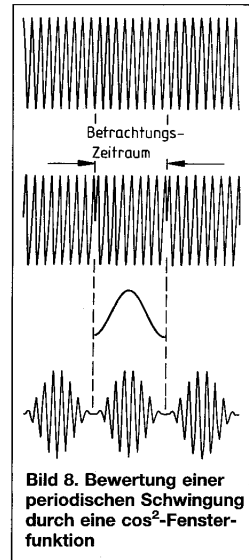
Eine Erhöhung der Selektivität bedingt beim Spektrumanalysator eine Verkleinerung der Auflösungsbandbreite, hingegen beim FFT-Analysator eine Vergrößerung des Meßfensters.

In Tabelle 2 sind die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften beider Meßgeräte-Arten gegenübergestellt. □

Entnommen aus dem Buch „Spektrumanalyse“ von W. Schnorrenberg.

## Literatur

- [1] The FFT; Instruction Manual. Tektronix Inc., Beaverton, Oregon.
- [2] Schnorrenberg, W.: Spektrumanalyse. Vogel Buchverlag, Würzburg.
- [3] HF- und Mikrowellenmeßtechnik. Lehrgang der TAE Esslingen. Teil „FFT-Spektrumanalyse“, Prof. G. Käs, W. Winter.
- [4] FFT Spectral Estimation; DSA600 Technical Brief, 47W-7435-1. Tektronix.



**Bild 8. Bewertung einer periodischen Schwingung durch eine  $\cos^2$ -Fensterfunktion**